3Ш

УДК 004.42:510.69

***О.С. Шкільняк*[1], *С.С. Шкільняк*[2]**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ
[1]me.oksana@gmail.com, [2]sssh@unicyb.kiev.ua

Композиційно-номінативні мультимодальні логіки

Запропоновано нові класи спеціальних програмно-орієнтованих логік часткових предикатів – композиційно-номінативні мультимодальні логіки. Описано мови і досліджено семантичні властивості таких логік реномінативного і кванторного рівнів. В межах пропонованих логік виділено композиційно-номінативні логіки епістемічного типу.

Вступ

Модальні логіки [1-4] з великим успіхом використовуються [1], [3] для аналізу й моделювання різноманітних предметних областей і аспектів діяльності людини. Особливого значення вони набувають у зв'язку зі створенням та розвитком сучасних інформаційних і програмних систем. Апарат темпоральних логік ефективно застосовується для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. На базі таких логік збудовано низку систем та мов специфікації. Для опису сучасних інтелектуальних систем, баз даних і баз знань використовуються епістемічні логіки.

Відомо багато різноманітних типів модальних логік (алетичні, темпоральні, епістемічні, деонтичні тощо), всі вони зазвичай базуються на класичній логіці тотальних скінченноарних предикатів. Обмеження класичної логіки мотивують необхідність побудови нових класів модальних логік, більше орієнтованих на потреби програмування й моделювання. Таку побудову природно вести на основі спільного для логіки і програмування композиційно-номінативного підходу [5]. На основі синтезу можливостей композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [6] і традиційних модальних логік запропоновано [7] композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ). Враховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, виділено транзиційні КНМЛ, які описують переходи від одного стану світу до іншого. Окремими їх випадками є загальні транзиційні та темпоральні КНМЛ.

Центральним поняттям КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи [8]. Такі системи описують світи розгляду модальної логіки. Спеціальне уточнення поняття композиційно-номінативної модальної системи для логік номінативних рівнів запропоноване в [8]. На цій основі побудовано і досліджено [8], [9] нові класи загальних транзиційних і темпоральних КНМЛ реномінативного та першопорядкових рівнів.

Метою даної роботи є побудова нових класів спеціальних програмно-орієнтованих логік часткових предикатів – композиційно-номінативних мультимодальних логік. Описано мови і досліджено семантичні властивості таких логік реномінативного і кванторного рівнів. В межах цих логік виділено КНМЛ епістемічного типу.

Поняття, які не визначаються у статті, тлумачимо в сенсі робіт [6], [9].

Наведемо небхідні для подальшого викладу поняття та визначення.

Іменні множини (ІМ) – це множини пар, перша компонента яких – ім'я, друга – значення цього імені. Формальне визначення іменної множини таке.

V-ІМ над A – це однозначна функція вигляду $\delta : V \to A$.

Тут V та A трактуємо як множини предметних імен та предметних значень.

Клас всіх V-ІМ над A позначаємо ${}^{V}A$.

V-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$. Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Вводимо функцію $im : {}^{V}A \to 2^{V}$ так: $im(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$.

Визначаємо $\delta \| X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$ та $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \| (V \setminus im(\delta_2)))$.

Функцію вигляду $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ називають V-квазіарним предикатом на A.

Клас V-квазіарних предикатів на A позначаємо Pr^{A}.

V-квазіарний предикат (частково) істинний, якщо для всіх $d \in {}^{V}A$ $P(d){\downarrow} \Rightarrow P(d) = T$.

Тут і далі $P(d){\downarrow}$ означає, що $P(d)$ визначене; $P(d){\uparrow}$ означає, що $P(d)$ невизначене.

Композицію реномінації $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^{A} \to Pr^{A}$ визначають так:

$$\boldsymbol{R}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(P)(d) = P([v_1 \mapsto \delta(x_1),...,v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \| (V \setminus \{v_1,...,v_n\}))).$$

Предикат P еквітонний, якщо з $P(d){\downarrow}$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d'){\downarrow}$ та $P(d) = P(d')$.

Еквітонність означає збереження прийнятого предикатом значення при розширенні даних. Ця властивість дуже важлива для програмування, вона притаманна формульним предикатам класичної логіки. Логіки еквітонних предикатів зберігають [6] основні закони класичної логіки.

Композиційно-номінативні модальні системи

Під композиційно-номінативною модальною системою (КНМС) будемо розуміти об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = (Cms, Ds, Dns)$. Тут Cms – композиційна модальна система (КМС), вона задає семантичні аспекти світу; Ds – дескриптивна система, вона визначає множину Fm формул відповідної мови КНМЛ; Dns – денотаційна система, вона задає значення формул на семантичній моделі – КМС.

КМС можна віднести до моделей реляційного типу. Під КМС розумітимемо об'єкт вигляду $Cms = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C)$. Тут:

– $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу;

– $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на $\boldsymbol{S}$ вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}$;

– Pr – множина предикатів на станах світу;

– C – множина композицій на Pr, вона визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями.

Базовими загальнологічними композиціями кванторного рівня є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\exists \boldsymbol{x}$, реномінативного рівня – $\neg$, $\vee$, та $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Конкретизуємо $\boldsymbol{S}$ як множину неокласичних [6] алгебраїчних систем (АС) вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквітонних предикатів вигляду ${}^{V}A_\alpha \to \{T, F\}$.

Тоді $Pr = \bigcup_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ – це множина предикатів усіх станів світу, $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$ – множина усіх базових даних світу.

Опишемо мову першопорядкових КНМС кванторного рівня.

Алфавіт мови: множина V предметних імен; множина Ps предикатних символів; символи базових загальнологічних композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина Ms символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множина Fm формул мови визначається індуктивно:

FA) кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули назвемо атомарними;

F$\neg$) нехай Φ – формула; тоді $\neg\Phi$ – формула;

F$\vee$) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\vee\Phi\Psi$ – формула;

FR) нехай Φ – формула; тоді $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – формула;

F$\exists$) нехай Φ – формула; тоді $\exists x\Phi$ – формула;

FM) нехай Φ – формула, $⌘ \in Ms$; тоді $⌘\Phi$ – формула.

Для кожного $p \in Ps$ за допомогою тотального $\mu : Ps \to 2^V$ визначається [6] множина його синтетично неістотних предметних імен, далі μ продовжується до $\mu : Fm \to 2^V$. Пару $\sigma = (Ps, \mu)$ називають [6] сигнатурою синтетичної неістотності.

Тип кванторної КНМС визначається її модальною сигнатурою Ms, однотипністю відношень із $\boldsymbol{R}$ для кожного $⌘ \in Ms$ та сигнатурою синтетичної неістотності.

Для визначення Dns задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $\boldsymbol{I} : Ps \times \boldsymbol{S} \to Pr$, при цьому $\boldsymbol{I}(p, \alpha) \in Pr_{\alpha}$. Таке $\boldsymbol{I}$ продовжимо до відображення інтерпретації формул на світах $\boldsymbol{Jm} : Fm \times \boldsymbol{S} \to Pr$. При цьому $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha) \in Pr_{\alpha}$.

IA) $\boldsymbol{Jm}(p, \alpha) = \boldsymbol{I}(p, \alpha)$ для кожного $p \in Ps$;

I$\neg$) $\boldsymbol{Jm}(\neg, \alpha) = \neg(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha))$;

I$\vee$) $\boldsymbol{Jm}(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha), \boldsymbol{Jm}(\Psi, \alpha))$;

IR) $\boldsymbol{Jm}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha))$;

I$\exists$) $$\boldsymbol{Jm}(\exists x\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для деякого } a \in A_{\alpha}, \\ F, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_{\alpha}, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

IM) $\boldsymbol{Jm}(⌘\Phi, \alpha)(d)$ визначається значеннями $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \delta)(d)$ для певних станів δ таких, що α та ці δ перебувають у відповідних пов'язаних із $⌘$ відношеннях з $\boldsymbol{R}$.

Аналогічно описуються КНМС реномінативного рівня, тільки у відповідних визначеннях опускаємо пункти, пов'язані з кванторами.

Таким чином, КНМС можна уточнити як об'єкт $\boldsymbol{M} = ((\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C), Fm, \boldsymbol{Jm})$.

Предикат $\boldsymbol{Jm}(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_{α}.

Формула Φ істинна в стані α, якщо Φ_{α} – істинний предикат.

Формула Φ істинна в КНМС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо для кожного $\alpha \in \boldsymbol{S}$ предикат Φ_{α} є істинним.

Формула Φ усюди істинна, якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Важливим випадком КНМС є ***транзиційні модальні системи*** (ТМС). Вони лежать в основі транзиційних КНМЛ, у межах яких природним чином можуть розглядатися і традиційні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні тощо. Для ТМС множина $\boldsymbol{R}$ складається з відношень вигляду $\mathrm{R} \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$ – відношень переходу.

ТМС, у яких $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення $\rhd$, а базовою модальною композицією є $\Box$ (необхідно), називають ***загальними***.

У випадку загальних ТМС п. FM визначення формули уточнимо так:

F$\Box$) нехай Φ – формула; тоді $\Box\Phi$ – формула.

Відображення ***Jm*** щодо формул вигляду □Φ для загальних ТМС задамо так.

Для кожних $\alpha\in\boldsymbol{S}$ та $d\in^V A_\alpha$ визначимо:

$$\boldsymbol{Jm}(\Box\Phi,\alpha)(d)=\begin{cases}T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha\rhd\delta,\\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Композиційно-номінативні мультимодальні системи

ТМС із $\boldsymbol{R}=\{\rhd_i \mid i\in I\}$, у яких кожному відношенню $\rhd_i$ зіставлено базову модальну композицію $\mathbf{K}_i$, назвемо ***мультимодальними*** (ММС).

Дія $\mathbf{K}_i$ аналогічна дії композиції □, але тільки щодо свого відношення $\rhd_i$, $i\in I$.

Зрозуміло, що загальні ТМС є окремим випадком ММС, тоді ***R*** складається з єдиного відношення ⊳ та маємо єдину базову модальну композицію **K**, ідентичну □.

Опишемо мову ММС кванторного рівня. Алфавіт мови: множини *V* предметних імен та *Ps* предикатних символів; символи базових композицій ¬, ∨, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, ∃*x*; множина $Ms=\{\mathrm{K}_i \mid i\in I\}$ символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

У випадку ММС п. FM визначення формули уточнимо так:

FK) нехай Φ – формула, $\mathrm{K}_i\in Ms$; тоді $\mathrm{K}_i\Phi$ – формула.

Відображення ***Jm*** : $Fm\times\boldsymbol{S}\to Pr$ стосовно формул вигляду $\mathrm{K}_i\Phi$ задамо так.

Для кожних $\alpha\in\boldsymbol{S}$ та $d\in^V A_\alpha$ визначимо:

$$\text{IM) } \boldsymbol{Jm}(\mathrm{K}_i\Phi,\alpha)(d)=\begin{cases}T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S \text{ таких, що } \alpha\rhd_i\delta,\\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S \text{ такий, що } \alpha\rhd_i\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Якщо для даного стану α не існує такого β, що $\alpha\rhd_i\beta$, то для кожного $d\in^V A_\alpha$ вважаємо ***Jm*** $(\mathrm{K}_i\Phi,\alpha)(d)\uparrow$.

При умові $d\notin^V A_\delta$ постає питання: як визначити $\Phi_\delta(d)$? Можна вважати, що тоді $\Phi_\delta(d)\uparrow$. Це рівносильно умові $\Phi_\delta(d)\downarrow\ \Rightarrow d\in^V A_\delta$. Така властивість КНМС названа [9] ***сильною*** умовою визначеності на станах.

У випадку ММС із сильною умовою визначеності із $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d)=T$ випливає $d\in^V A_\delta$ для всіх δ таких, що $\alpha\rhd_i\delta$. Це означає: при переході до стану-наступника об'єкти не можуть зникати. ММС із сильною умовою визначеності назвемо *St*-ММС.

Те, що в *St*-ММС при $d\notin^V A_\delta$ маємо $\Phi_\delta(d)\uparrow$, веде до порушення еквітонності.

Приклад 1. Задамо *St*-ММС ***M*** із єдиним відношенням ⊳ таким чином. Нехай $\boldsymbol{S}=\{\alpha,\beta\}$, $A_\alpha=\{a,b\}$, $A_\beta=\{b\}$, $\boldsymbol{R}=\{\{\alpha\rhd\beta\}\}$. Нехай $d=[x\mapsto b]$, $d'=[x\mapsto b, y\mapsto a]$. Задамо $p_\alpha(d)=T$, $p_\alpha(d')=T$, $p_\beta(d)=T$. Нехай p_α та p_β еквітонні. Згідно з $d'\notin^V A_\beta$ маємо $p_\beta(d')\uparrow$. Отже, $d\subset d'$, $(\mathrm{K}p)_\alpha(d)=T$ та $(\mathrm{K}p)_\alpha(d')\uparrow$, що суперечить еквітонності $(\mathrm{K}p)_\alpha$.

Таким чином, модальні композиції *St*-ММС не зберігають еквітонність, проте вони зберігають слабшу умову – слабку еквітонність.

Квазіарний предикат *P* на *A* слабко еквітонний [9], якщо для довільних $d, d'\in^V A$ таких, що $d\subseteq d'$, із умов $P(d)\downarrow$ та $P(d')\downarrow$ випливає $P(d)=P(d')$.

Теорема 1. Композиції $\mathbf{K}_i$, $i\in I$, зберігають слабку еквітонність.

Доведення. Нехай Φ_α слабко еквітонний та для кожного β, такого, що $\alpha\rhd_i\beta$, предикат Φ_β слабко еквітонний. Нехай $d, d'\in^V A_\alpha$, $d\subseteq d'$, $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d)\downarrow$ та $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d')\downarrow$.

Припустимо супротивне: $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d) \neq (\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d')$. Можливі два випадки.

Нехай $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d) = T$ та $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d') = F$. Друге означає, що для деякого β, такого, що $\alpha \rhd_i \beta$, маємо $\Phi_\beta(d') = F$. Перше означає, що для кожного γ, такого, що $\alpha \rhd_i \gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d) = T$. Але це вірно і для стану β, тобто $\Phi_\beta(d) = T$. Маємо $d \subseteq d'$, $\Phi_\beta(d) = T$ та $\Phi_\beta(d') = F$, що суперечить умові слабкої еквітонності для Φ_β.

Нехай $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d) = F$ та $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d') = T$. Перше означає, що для деякого β. такого, що $\alpha \rhd_i \beta$, маємо $\Phi_\beta(d) = F$. Друге означає, що для кожного, γ такого, що $\alpha \rhd_i \gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d') = T$. Але це вірно і для β, тобто $\Phi_\beta(d') = T$. Маємо $d \subseteq d'$, $\Phi_\beta(d) = F$ та $\Phi_\beta(d') = T$, що суперечить умові слабкої еквітонності для Φ_β.

Обидва випадки привели до суперечності. Отже, $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha$ слабко еквітонний.

Наслідок 1. Базові композиції *Gn*-ММС зберігають еквітонність.

Тепер будемо вважати, що $d \in^{V} A_\delta$ не є обов'язковим для $\Phi_\delta(d)\downarrow$.

ІМ $[v \mapsto a \in d \mid a \in A_\delta]$ скорочено позначимо d_δ. КНМС, в яких при $d \notin^{V} A_\delta$ задаємо $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$, назвемо КНМС із ***загальною*** умовою визначеності на станах ММС із загальною умовою визначеності *Gn*-ММС.

Теорема 2. У випадку *Gn*-ММС композиції $\mathbf{K}_i$, $i \in I$ зберігають еквітонність.

Доведення. Нехай предикат Φ_α еквітонний та для кожного β, такого, що $\alpha \rhd_i \beta$, предикат Φ_β еквітонний. Нехай $d, d' \in^{V} A_\alpha$, $d \subseteq d'$ та $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d)\downarrow$. Можливі два випадки.

Нехай $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d) = F$. Тоді для деякого β такого, що $\alpha \rhd_i \beta$, маємо $\Phi_\beta(d_\beta) = F$. При $d \subseteq d'$ маємо $d_\beta \subseteq d'_\beta$, тому $\Phi_\beta(d'_\beta) = F$ за еквітонністю Φ_β, звідки $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d') = F$.

Нехай $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d) = T$. Тоді для кожного, γ такого, що $\alpha \rhd_i \gamma$, маємо $\Phi_\gamma(d_\gamma) = T$. При $d \subseteq d'$ маємо $d_\gamma \subseteq d'_\gamma$, тому за еквітонністю Φ_γ маємо $\Phi_\gamma(d'_\gamma) = T$. Це вірно для кожного, γ такого, що $\alpha \rhd_i \gamma$, звідки $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d') = T$. Отже, предикат $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha$ еквітонний.

Наслідок 2. Базові композиції *Gn*-ММС зберігають еквітонність.

Для *St*-ММС та *Gn*-ММС справджується твердження, яке дає можливість проносити символи реномінації через символи модальних композицій.

Теорема 3. Для довільних $\mathrm{K}_i \in Ms$; α, Φ, та $d \in^{V} A_\alpha$ маємо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\mathrm{K}_i\Phi(d) = \mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi(d)$.

Наведемо доведення для випадку *Gn*-ММС. Для *St*-ММС доведення навіть простіше, воно подібне до доведення для випадку загальних *St*-ТМС, наведеного в [9].

Для доведення теореми використаємо таке технічне твердження (див. [9]).

Лема. Для довільних β та $d \in^{V} A_\alpha$ маємо $d_\beta \nabla \bar{v} \mapsto (d_\beta)(\bar{x}) = (d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x}))_\beta$.

Доводимо теорему. Припустимо супротивне: для деяких $\alpha \in \boldsymbol{S}$, $d \in^{V} A_\alpha$ та Φ маємо $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d) \neq (\mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi)_\alpha(d)$. Розглянемо всі можливі випадки.

Нехай $(\mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi)_\alpha(d) = F$. Це означає, що для деякого $\beta \in \boldsymbol{S}$, такого, що $\alpha \rhd_i \beta$, маємо $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi)_\beta(d_\beta) = F$, звідки отримуємо $\Phi_\beta(d_\beta \nabla \bar{v} \mapsto (d_\beta)(\bar{x})) = F$. Але згідно з лемою маємо $d_\beta \nabla \bar{v} \mapsto (d_\beta)(\bar{x}) = (d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x}))_\beta$, звідки $\Phi_\beta((d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x}))_\beta) = F$.

Якщо $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d) = T$, то $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x})) = T$, звідки для такого стану β отримуємо $\Phi_\beta((d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x}))_\beta) = T$. Отримали суперечність. Якщо $(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d)\uparrow$, то $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x}))\uparrow$. Це означає, що для кожного γ, такого, що $\alpha \rhd_i \gamma$, неможливо $\Phi_\gamma((d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x}))_\gamma) = F$, адже тоді $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x})) = F$. Згідно з $\alpha \rhd_i \beta$ це вірно, зокрема, для стану β, тобто неможливо $\Phi_\beta((d \nabla \bar{v} \mapsto d(\bar{x}))_\beta) = F$. Знову суперечність.

Отримали $(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=F \Leftrightarrow (R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)=F$.

Нехай $(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T$. Якщо $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)=F$, то $(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=F$, що неможливо. Нехай $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)\uparrow$. Згідно з $(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T$ для кожного γ такого, що $\alpha\rhd_i\gamma$, маємо $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\gamma(d_\gamma)=\Phi_\gamma(d_\gamma\nabla\bar v\mapsto(d_\gamma)(\bar x))=T$. Згідно з лемою $d_\gamma\nabla\bar v\mapsto(d_\gamma)(\bar x)=(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))_\gamma$, звідки $\Phi_\gamma((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))_\gamma)=T$, для кожного γ такого, що $\alpha\rhd_i\gamma$, тобто $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\gamma(d)=T$, що суперечить $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)\uparrow$. Отже, $(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T\Rightarrow(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)=T$.

Нехай $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)=T$. Якщо $(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=F$, то $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i)_\alpha(d)=F$, що неможливо. Нехай $(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)\uparrow$, тоді $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\beta(d_\beta)\uparrow$ принаймі для одного β, такого, що $\alpha\rhd_i\beta$, звідки $\Phi_\beta((d_\beta)\nabla\bar v\mapsto(d_\beta)(\bar x))\uparrow$. Згідно з лемою $d_\gamma\nabla\bar v\mapsto(d_\gamma)(\bar x)=(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))_\gamma$, звідки $\Phi_\beta((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))_\beta)\uparrow$. Але із $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)=T$ маємо $(\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))=T$, звідки $\Phi_\beta((d\nabla\bar v\mapsto d(\bar x))_\beta)=T$ – суперечність. Отже, $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(d)=T\Rightarrow(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T$.

Отримали $(\mathrm{K}_i\,R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)=T\Leftrightarrow(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)=T$.

Таким чином, $(R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)=(\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi)_\alpha(d)$, що завершує доведення теореми.

Наслідок 3. Формули вигляду $R_{\bar x}^{\bar v}\,\mathrm{K}_i\,\Phi\leftrightarrow\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}\,\Phi$ всюди істинні.

Для довільної *St*-ММС чи *Gn*-ММС ***M*** та $\mathrm{K}_i\in Ms$ справджується.

Теорема 4. 1) $\boldsymbol{M}\models\exists x\,\mathrm{K}_i\,\Phi\to\mathrm{K}_i\,\exists x\Phi$; 2) $\boldsymbol{M}\models\mathrm{K}_i\forall x\Phi\to\forall x\,\mathrm{K}_i\,\Phi$.

Доводимо для випадку *Gn*-ММС. Для *St*-ММС доведення подібне доведенню відповідного твердження для загальних *St*-ТМС.

Доведемо п. 2, доведення п. 1 проводиться аналогічно.

Припустимо супротивне: для деяких $\alpha\in\boldsymbol{S}$ та $d\overset{V}{\in}A_\alpha$ маємо $(\mathrm{K}_i\forall x\Phi)_\alpha(d)=T$ та $(\forall x\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d)=F$. Друга умова означає, що для деякого $a\in A_\alpha$ маємо $(\mathrm{K}_i\,\Phi)_\alpha(d\nabla x\mapsto a)=F$, тому для деякого стану $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd_i\beta$, маємо $\Phi_\beta((d\nabla x\mapsto a)_\beta)=F$. Згідно з $(\mathrm{K}_i\,\forall x\Phi)_\alpha(d)=T$ для такого β маємо $(\forall x\Phi)_\beta(d_\beta)=T$, звідки $\Phi_\beta(d_\beta\nabla x\mapsto b)=T$ для всіх $b\in A_\beta$. Розглянемо два випадки.

Нехай $a\in A_\beta$. Тоді $(d\nabla x\mapsto a)_\beta=d_\beta\nabla x\mapsto a$, звідки $\Phi_\beta((d\nabla x\mapsto a)_\beta)=\Phi_\beta(d_\beta\nabla x\mapsto a)=F$. Але $\Phi_\beta(d_\beta\nabla x\mapsto b)=T$ для всіх $b\in A_\beta$, звідки $\Phi_\beta(d_\beta\nabla x\mapsto a)=T$. Отримали суперечність.

Нехай $a\notin A_\beta$. Тоді $(d\nabla x\mapsto a)_\beta=(d_\beta)\|_{-x}$, звідки $\Phi_\beta((d\nabla x\mapsto a)_\beta)=\Phi_\beta(d_\beta\|_{-x})=F$. Але для кожного $b\in A_\beta$ маємо $d_\beta\|_{-x}\subset d_\beta\nabla x\mapsto b$, звідки $\Phi_\beta(d_\beta\nabla x\mapsto b)=F$ за еквітонністю Φ_β. Отримали суперечність із умовою $\Phi_\beta(d_\beta\nabla x\mapsto b)=T$ для всіх $b\in A_\beta$.

Наслідок 4. Формули $\exists x\mathrm{K}_i\,\Phi\to\mathrm{K}_i\,\exists x\Phi$ та $\mathrm{K}_i\forall x\Phi\to\forall x\,\mathrm{K}_i\,\Phi$ є всюди істинними.

Водночас формули $\forall x\,\mathrm{K}_i\,\Phi\to\mathrm{K}_i\forall x\Phi$ та $\mathrm{K}_i\exists x\Phi\to\exists x\,\mathrm{K}_i\,\Phi$ не є всюди істинними.

Відповідні контрмоделі для випадку загальних ТМС наведено в [9].

Залежно від властивостей відношень $\rhd_i$ можна визначати різні класи ММС. Розглянемо найпростіші випадки, коли $\rhd_i$ може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним. Якщо всі $\rhd_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ *R*; якщо всі $\rhd_i$ транзитивні, то пишемо *T*; якщо всі $\rhd_i$ симетричні, то пишемо *S*. Тоді отримуємо такі чисті типи: *R*-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

Зрозуміло, що можливі набагато складніші, змішані типи ММС (наприклад, відношення $\rhd_1$ симетричне, $\rhd_2$ транзитивне, $\rhd_3$ транзитивне та рефлексивне і т.п.).

ММС із скінченними множинами однотипних відношень $\rhd_i$ будемо називати **ММС епістемічного типу**. Вони тісно пов'язані з традиційними системами епістемічної модальної логіки.

Епістемічна модальна логіка [1], [4] досліджує різні аспекти знання. В останній час помітно зросла зацікавленість до логічного аналізу знання з боку інформатики, особливо в плані подання знання в формальних моделях, що вкрай важливо для побудови інтелектуальних інформаційних систем, експертних систем та баз знань.

Найпростіші системи епістемічної логіки використовують єдиний модальний оператор знання **K**, що відповідає наявності єдиного суб'єкта знання (агента, експерта). Реляційна семантика є дуже природною для систем епістемічної логіки. Стани світу трактуються як стани знання, ситуації. Відношення досяжності $\rhd$ трактується так: $\alpha\rhd\beta$ означає, що експерт в ситуації α розглядає ситуацію β як можливу.

Узагальненнями систем епістемічної логіки з одним експертом є системи із скінченною множиною суб'єктів знання. Для цього вводять модальні оператори знання $\mathbf{K_1}, \ldots, \mathbf{K_n}$ та відповідні їм відношення досяжності $\rhd_1, \ldots, \rhd_n$. При цьому $\alpha\rhd_k\beta$ означає, що k-й експерт в ситуації α розглядає ситуацію β як можливу.

В базових системах епістемічної логіки постулюються наступні аксіоми знання експертів (агентів):

AE) $K_i(\Phi\to\Psi)\to(K_i\Phi\to K_i\Psi)$ – замкненості знання щодо імплікації (вивідності);

AR) $K_i\Phi\to\Phi$ – реальності знання;

AP) $K_i\Phi\to K_iK_i\Phi$ – позитивної рефлексії (позитивної інтроспективності);

AN) $\neg K_i\Phi\to K_i\neg K_i\Phi$ – негативної рефлексії (негативної інтроспективності).

При цьому істинність аксіом AR в модальній системі рівносильна рефлексивності відношень $\rhd_i$, цієї системи, істинність аксіом AP рівносильна транзитивності відношень $\rhd_i$, істинність AN дає транзитивність і симетричність відношень $\rhd_i$.

Традиційно розглядають [1] системи епістемічної логіки з n експертами (агентами) та рефлексивними відношеннями $\rhd_i$ ($T_{(n)}$-системи), рефлексивними й тразитивними відношеннями $\rhd_i$ ($S4_{(n)}$-системи), рефлексивними, тразитивними й симетричними відношеннями $\rhd_i$ ($S5_{(n)}$-системи).

Зазначені базові системи епістемічної логіки природним чином розглядаються в межах ММС епістемічного типу. Зокрема, R-ММС, RT-ММС та RTS-ММС є узагальненнями відповідно $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$-систем.

Висновки

На основі композиційно-номінативного підходу в роботі запропоновано нові класи спеціальних програмно-орієнтованих логік часткових предикатів – композиційно-номінативні мультимодальні логіки. Окремим випадком таких логік є композиційно-номінативні загальні транзиційні логіки. Описано мови і досліджено семантичні властивості композиційно-номінативних мультимодальних логік реномінативного та кванторного рівнів. Виділено композиційно-номінативні мультимодальні системи із сильною умовою та загальною умовою визначеності на станах. В межах пропонованих логік виділено композиційно-номінативні логіки епістемічного типу.

Проведене дослідження планується продовжити в плані побудови для запропонованих логік числень секвенційного типу.

Література

1. Андон Ф.И. Логические модели интеллектуальных информационных систем / Ф.И. Андон, А.Е. Яшунин, В.А. Резниченко. – К. : Наукова думка, 1999. – 396 с.
2. Cocchiarella N.B. Modal logic / N.B. Cocchiarella, M.A. Freund. – Oxford University Press, 2008. – 267 p.
3. Handbook of Logic in Computer Science : In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford : Clarendon Press, 1994 – 2000.
4. Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки / Ішмуратов А.Т. – К.: Абрис,1997. – 350 с.
5. Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н.С. Никитченко // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
6. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
7. Нікітченко М.С. Композиційно-номінативні модальні логіки / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. // Проблемы программирования. – 2002. – № 1–2. – С. 27–33.
8. Шкільняк О.С. Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення / О.С.Шкільняк // Наукові записки НаУКМА. Серія: Комп’ютерні науки. – 2008. – Т. 86. – С. 25–34.
9. Шкільняк О.С. Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.

Literatura

1. Andon F.I. Logicheskie modeli intellektual'nyh informacionnyh sistem. K.: Naukova dumka. 1999. 396 s.
2. Cocchiarella N.B. Modal logic. Oxford University Press. 2008. 267 p.
3. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. Oxford: Clarendon Press. 1994-2000.
4. Ishmuratov A.T. Vstup do filosofs’koyi lohiky. K.: Abrys. 1997. 350 s.
5. Nykytchenko N.S. Problemy programmirovania. № 1. 1999. S. 16-31.
6. Nikitchenko M.S. Matematychna lohika ta teoriya alhorytmiv. K.: VPC Kyyivs'kyj universytet. 2008. 528 s.
7. Nikitchenko M.S. Problemy programmirovania. № 1-2. 2002. S. 27-33.
8. Shkil'nyak O.S. Naukovi zapysky NaUKMA. Seriya: Komp’yuterni nauky. T. 86. 2008. S. 25-34.
9. Shkil'nyak O.S. Problemy programmirovania. № 4. 2009. S. 11-23

О.С. Шкильняк*, *С.С. Шкильняк

Композиционно-номинативные мультимодальные логики.
Предложены новые классы специальных программно-ориентированных логик частичных предикатов – композиционно-номинативные мультимодальные логики. Описаны языки и исследованы семантические свойства таких логик реноминативного и кванторного уровней. В рамках предложенных логик выделены композиционно-номинативные логики эпистемического типа.

O.S. Shkilniak*, *S.S. Shkilniak

Compositional Nominative Multimodal Logics
New special-purpose classes of program-oriented logics of partial predicates, i.e. compositional nominative multimodal logics, are introduced. For the logics of renominative and quantifier levels, languages are defined and semantic properties are studied. Compositional nominative logics of epistemic type are given within the defined logics.

Стаття надійшла до редакції 16.06.2011